Vincent Beck

Géométrie

0 Mode d'emploi.

L'objectif de ces feuilles d'exercices est de vous fournir une base de travail pour l'apprentissage de la géométrie affine. J'y ai volontairement mis beaucoup de références aux ouvrages classiques pour que vous preniez le réflexe (salvateur le jour de l'oral !) d'aller voir dans les livres. Le contenu et surtout l'organisation de ces feuilles reflètent ma façon d'aborder la géométrie affine qui n'est peut-être pas la vôtre : j'ai essayé de dissocier les résultats théoriques généraux pour les mettre en avant dans la partie I et garder la géométrie affine comme une illustration de ces résultats généraux. C'est pourquoi la première partie est très théorique et s'attarde principalement sur des rappels de théorie de groupes. Dans la deuxième partie, on définit les espaces affines. La troisième partie est consacrée aux barycentres. La quatrième partie s'intéresse aux applications affines et la cinquième aux sous-espaces affines. La sixième partie étudie les notions de repère. Enfin la septième partie propose quelques exercices d'applications de l'ensemble des notions. En fonction des connaissances que vous avez déjà, n'hésitez pas à sauter d'une partie à une autre. Pour ceux qui ont envie de faire tout de suite de la vraie géométrie affine : commencez donc par la partie II.

Voici quelques indications des exercices à ne pas rater : l'exercice 5 (pour se remettre les idées en place), l'exercice 9 (question de cours), l'exercice 12 (un grand classique), l'exercice 14 (question de cours), la définition 17 et l'exercice 16 (questions de cours), l'exercice 17 (questions de cours), les exemples 23 à 25 (des exemples omniprésents) et surtout l'exercice 19 (pour illustrer les leçons sur les groupes et bien comprendre le groupe affine), l'exercice 20 (question de cours), l'exercice 28 (pour éviter de tomber dans le vide), l'exercice 22 (encore un piège à éviter).

I Quelques compléments théoriques pour faire de la géométrie.

Cette partie est divisée en trois sous-parties. La première sous-partie est consacrée à la notion de transfert de structure. La deuxième sous-partie se penche sur les quotients successifs. Enfin la troisième sous-partie, la plus longue, est consacrée à des rappels sur la théorie des groupes.

1) Transfert de structure.

Le transfert de structure est une notion simple. D'un coté, on a un ensemble X muni d'un structure (groupe, anneau, espace vectoriel, espace topologique, etc.), de l'autre on dispose juste d'un ensemble Y (sans rien de plus) ; enfin pour relier les deux : on suppose qu'on a une bijection (ensembliste) $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ entre X et Y. Cette bijection permet de construire sur Y une structure identique à celle de X. De façon heuristique, lorsqu'on veut calculer dans Y, on envoie, à l'aide de f^{-1}, les éléments sur lesquels on veut faire les calculs dans X, on fait le calcul correspondant dans X et on le renvoie dans Y, à l'aide de f (voir les formules (**1**), (**2**) et (**3**) de l'exercice 1). C'est la question **a** de l'exercice 1 qui justifie cette heuristique.

Pourquoi s'intéresser à cette notion dans un cours de géométrie affine ? En géométrie affine, on dispose de nombreuses bijections entre un ensemble (l'espace affine) et un espace vectoriel (la direction de l'espace affine) : ces bijections correspondent aux choix d'une origine dans l'espace affine (ce sont les bijections φ_x de l'exercice 4). On se sert donc de ces bijections pour transférer un certain nombre de structures supplémentaires sur l'espace affine : par exemple, la topologie, la distance ou la mesure de Lebesgue d'un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie sont obtenues par transfert de structure (voir la question **d** de l'exercice 4). La question **c** de l'exercice 1 justifie pourquoi ces exemples fonctionnent et définissent de façon canonique une topologie, une distance ou une mesure alors que la structure d'espace vectoriel transférée depuis la direction sur l'espace affine n'est elle pas canonique.

L'exercice 1 propose donc une révision rapide de la notion de transfert de structure. La question **a** définit la notion de transfert de structure et justifie l'heuristique de cette notion. La question **b** répond à la question « quand une application qui part ou qui arrive dans un espace muni d'une structure transférée est-elle un morphisme ? » Enfin la question **c** étudie la question qui nous intéresse particulièrement en géométrie affine « que se passe-t-il lorsqu'on veut transférer à l'aide de plusieurs bijections une même structure sur un ensemble ? à quelles conditions peut-on le faire ? »

Exercice 1 – Transfert de structure. Soient $(\mathrm{E}, \cdot_{\mathrm{E}})$ un groupe (resp. $(\mathrm{E}, +_{\mathrm{E}}, \cdot_{\mathrm{E}})$ un espace vectoriel sur k, $(\mathrm{E}, \mathscr{T}_{\mathrm{E}})$ un espace topologique...), F un ensemble et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une bijection.

a) Montrer qu'il existe une unique structure de groupe (resp. d'espace vectoriel, d'espace topologique...) sur F telle que f soit un morphisme de groupes (resp. une application linéaire, un homéomorphisme). Montrer que

la loi de groupe (resp. les lois d'espace vectoriel, la topologie) sur F est donnée par

$$\forall\, x, y \in \mathrm{F}, \qquad x \cdot_{\mathrm{F}} y = f(f^{-1}(x) \cdot_{\mathrm{E}} f^{-1}(y)) \tag{1}$$

resp. $$\forall\, x, y \in \mathrm{F}, \quad \forall\, \lambda \in k, \qquad x +_{\mathrm{F}} y = f(f^{-1}(x) +_{\mathrm{E}} f^{-1}(y)), \quad \lambda \cdot_{\mathrm{F}} x = f(\lambda \cdot_{\mathrm{E}} f^{-1}(x)) \tag{2}$$

et $$\mathscr{T}_{\mathrm{F}} = \{f(\mathrm{U}), \quad \mathrm{U} \in \mathscr{T}_{\mathrm{E}}\}\,. \tag{3}$$

On dit que $(\mathrm{F}, \cdot)$ (resp. $(\mathrm{F}, +, \cdot)$, $(\mathrm{F}, \mathscr{T}_{\mathrm{F}})$) est la *structure de groupe* (resp. *d'espace vectoriel, d'espace topologique*) *obtenue par transfert de structure via* f.

b) Soient E' un groupe (resp. espace vectoriel, espace topologique), $g : \mathrm{E}' \to \mathrm{F}$, $h : \mathrm{F} \to \mathrm{E}'$ deux applications. Montrer que l'application g est un morphisme de groupes (resp. linéaire, continue) si et seulement si $f^{-1} \circ g : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$ l'est. Montrer que l'application h est un morphisme de groupes (resp. linéaire, continue) si et seulement si $h \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ l'est. La facilité de cette question peut la faire paraître stupide. Mais, dans la pratique, lorsqu'on transfère une structure, ce sont les applications $f^{-1} \circ g$ ou $h \circ f$ qui ont, le plus souvent, une description simple et explicite.

c) Soient E, E' deux groupes (resp. espaces vectoriels, espaces topologiques), F un ensemble et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{E}' \to \mathrm{F}$ deux bijections. Les deux structures de groupe (resp. espace vectoriel, espace topologique) construites sur F par transfert de structure via f et g coïncident si et seulement si $g^{-1} \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ est un morphisme de groupes (resp. linéaire, un homéomorphisme). Autrement dit, on définit une seule structure sur F et non deux si $g^{-1} \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ est un « isomorphisme » pour cette structure.

2) Un peu de quotient.

Dans l'exercice qui suit, on s'intéresse à ce qui se passe lorsque plusieurs relations d'équivalence sur un même ensemble entrent en jeu. Seule la question **a** est utile pour la suite des exercices : elle sert en fait de préparation à la question **g** de l'exercice 4. La question **b** est là pour rendre le propos un peu plus exhaustif. Enfin, la question **c** illustre par un exemple classique les résultats des questions **a** et **b**.

Exercice 2 — Comparaison de relations d'équivalence. Soient X un ensemble et $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ deux relations d'équivalence sur X. Pour $i \in \{1, 2\}$, on pose $\pi_i : \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathscr{R}_i$ la surjection canonique et $\Gamma_i = \{(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X},\ x \mathscr{R}_i y\}$ le graphe de la relation $\mathscr{R}_i$.

a) Montrer les équivalences

(*i*) $\mathscr{R}_1 \implies \mathscr{R}_2$ (c'est-à-dire si on a $x\mathscr{R}_1 y$ alors on a aussi $x\mathscr{R}_2 y$) ;

(*ii*) $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$;

(*iii*) π_2 se factorise par π_1 (c'est-à-dire il existe $f : \mathrm{X}/\mathscr{R}_1 \to \mathrm{X}/\mathscr{R}_2$ vérifiant $\pi_2 = f \circ \pi_1$) ;

(*iv*) les classes d'équivalence modulo $\mathscr{R}_2$ sont réunions de classes d'équivalence modulo $\mathscr{R}_1$.

b) On suppose que les conditions de la question **a** sont vérifiées. Définir sur $\mathrm{X}/\mathscr{R}_1$ une relation d'équivalence notée $\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1$ vérifiant

$$\pi_1(x)\, \mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1\, \pi_1(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \mathscr{R}_2 y\,.$$

Pour simplifier les vérifications, on pourra penser à utiliser l'application f de (*iii*) **a**. Montrer que le quotient $(\mathrm{X}/\mathscr{R}_1)/(\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1)$ est en bijection avec $\mathrm{X}/\mathscr{R}_2$.

c) Soient G un groupe et $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$ deux sous-groupes distingués de G. Pour $i \in \{1, 2\}$, on définit $\mathscr{R}_i$ la relation d'équivalence associée à H_i. Donner une condition nécessaire et suffisante sur H_1 et H_2 pour que les conditions de la question **a** soient vérifiées. Que deviennent dans ces conditions la relation $\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1$ et la bijection de la question **b** (voir aussi la question 7 **a** de l'épreuve de MG 1996).

3) Action de groupe : compléments.

L'axiomatique de la géométrie affine repose de façon essentielle sur la notion d'action de groupe : un espace affine est un ensemble sur lequel le groupe sous-jacent à un espace vectoriel agit de façon fidèle et transitive (voir la définition 7). Dans cette partie, on rappelle donc quelques définitions standards des actions de groupes ainsi que les liens entre elles (voir la définition 1, la remarque 2 et l'exercice 3). On prend aussi le temps de réfléchir sur l'ensemble vide qui a son importance en géométrie affine (remarque 3). L'exercice central de ce rappel est l'exercice 4 qui utilise les rappels précédents et anticipe sur la notion d'angle dans le plan. L'objet de cet exercice est l'étude des actions simples et transitives des groupes abéliens.

Pour commencer notre étude des actions de groupes, rappelons quelques définitions usuelles.

Définition 1 — Action simple, action transitive, action fidèle. [BER, 1.3 et 1.4] Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. On dit que G agit *transitivement* sur X si pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $y = gx$. On dit que G agit *simplement* ou *librement* sur X si pour tout $x \in \mathrm{X}$, le stabilisateur $\mathrm{G}_x = \{g \in \mathrm{G},\ gx = x\}$ de x est réduit à l'élément neutre. On dit que G agit *fidèlement* sur X si

$$\bigcap_{x\in \mathrm{X}} \mathrm{G}_x = \{1\}.$$

La remarque qui suit caractérise la fidélité d'une action en terme du morphisme associé à l'action.

Remarque 2 – Action fidèle. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Montrer que G agit fidèlement sur X si et seulement si le morphisme de groupes $\varphi : \mathrm{G} \to \mathfrak{S}_\mathrm{X}$ associé à l'action est injectif (on fera l'effort de donner une « formule générale » pour le noyau de φ). ■

Remarque 3 – Méditation sur le vide. Quels sont les groupes qui opèrent fidèlement sur l'ensemble vide ? Quels sont les groupes qui opèrent simplement sur l'ensemble vide ? Quels sont les groupes qui opèrent transitivement sur l'ensemble vide ? Combien une action transitive a-t-elle d'orbites ?

On considère à présent une action sur un ensemble quelconque. Montrer qu'une action simple est « presque » toujours fidèle. Quel cas fait exception ? Donner des exemples d'action fidèle non simple (on pourra penser à $\mathfrak{S}_n$ ou GL(V)). ■

Cette méditation sur le vide n'est pas si anecdotique ! En géométrie affine, la question du vide est importante : l'intersection de deux sous-espaces affines peut l'être, l'ensemble des points fixes d'une application affine aussi... alors qu'on a envie que ce soient des sous-espaces affines.

L'exercice qui suit fait le lien entre action simple et transitive et action fidèle et transitive (il est là, notamment la question **b**, pour faire écho à la définition 7 d'un espace affine).

Exercice 3 – Action simple, transitive et fidèle.

a) Montrer qu'un groupe qui opère transitivement et librement sur X **non vide** opère en fait de façon transitive et fidèle. Cette question est en fait une reformulation de la remarque 3 ; l'hypothèse de transitivité étant ici totalement superflue. Cette hypothèse de transitivité est en fait présente pour faire le parallèle avec la question qui suit.

b) Montrer qu'un groupe **abélien** qui opère transitivement et fidèlement sur X opère en fait de façon transitive et libre [BER, 1.4.4.1].

L'exercice suivant qui est le cœur de cette révision sur les actions de groupes, étudie la situation suivante. On considère un groupe G qui agit simplement et transitivement sur un ensemble X. Les questions **a** à **d** mettent en place les notations pour la suite de l'exercice et étudient les propriétés élémentaires d'une action simple et transitive (on verra apparaître en particulier à la question **b** une version abstraite de la relation de Chasles). Dans cette situation, on peut définir sur l'ensemble $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ deux relations d'équivalence (questions **e** et **f**) et on étudie dans la question **g** quand ces relations d'équivalence sont comparables. On en déduit alors, grâce au transfert de structure, une structure de groupe sur l'ensemble quotient $(\mathrm{X} \times \mathrm{X})/\mathrm{G}$. C'est cette construction qui permet de définir la structure de groupe sur les angles orientés dans le plan euclidien... (voir les exemples 5 et 6).

Exercice 4 – Action simple et transitive. Soit G un groupe agissant simplement et transitivement sur un ensemble X.

a) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, il existe un unique $g \in \mathrm{G}$ tel que $y = gx$. On pose alors $g = \Phi(x, y)$ (intuitivement, $\Phi(x, y)$ est l'unique élément de G qui fait passer de x à y).

b) Montrer qu'on définit ainsi une application (qui est surjective lorsque X est non vide)

$$\Phi : \begin{cases} \mathrm{X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{G} \\ (x, y) \longmapsto \Phi(x, y) \end{cases}$$

Quel axiome est synonyme de la *relation de Chasles* : $\Phi(y, z)\Phi(x, y) = \Phi(x, z)$?

c) Soit $x \in \mathrm{X}$. Montrer que l'application

$$\varphi_x : \begin{cases} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{X} \\ g \longmapsto gx \end{cases}$$

est une bijection G-équivariante (pour l'action de G sur lui-même par translation à gauche). En déduire une structure de groupe sur X dont l'élément neutre est x (la structure de groupe dépend donc du choix de $x \in \mathrm{X}$, elle n'est pas canonique). Dans le cas d'un espace affine, cette action s'appelle la vectorialisation en x (voir la notation 8).

d) Pour $x, y \in \mathrm{X}$, calculer ${\varphi_x}^{-1}\varphi_y$ en fonction de $\Phi(x, y)$. Moralité : la question **c** de l'exercice 1 et le calcul précédent montre que les structures qu'on peut transférer sur X à partir de G sont celles qui sont invariantes par translation à droite ce qui n'est bien sûr pas le cas de la structure de groupe (comme on l'a vu à la question précédente) puisque la translation à droite n'est pas un morphisme de groupes. Cependant, la translation (à droite) étant un homéomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on peut, par transfert de structure, définir une topologie sur un $\mathbb{R}$-espace affine (de dimension finie). De même, pour un espace affine de dimension finie sur $\mathbb{R}$, l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation sur $\mathbb{R}^n$ permet de définir une mesure de Lebesgue sur un espace affine (voir la question **c** de l'exercice 1).

e) On définit alors sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ la relation d'équivalence $\mathscr{R}_1$ associée à Φ c'est-à-dire

$$(x, x')\mathscr{R}_1(y, y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi(x, x') = \Phi(y, y')\ ;$$

autrement $(x, x')\mathscr{R}_1(y, y')$ si on « passe » de x à x' de la même façon qu'on passe de y à y'. Montrer que $\mathscr{R}_1$ est bien une relation d'équivalence et que, lorsque X est non vide, Φ induit une bijection de $(\mathrm{X} \times \mathrm{X})/\mathscr{R}_1 \to \mathrm{G}$.

f) Montrer que G agit sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ de la façon suivante

$$\begin{cases} \mathrm{G} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{X} \\ \quad (g, x, y) \quad \longmapsto (gx, gy)\,. \end{cases}$$

On note $\mathscr{R}_2$ la relation (dont on vérifiera qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence) associée à cette action (c'est-à-dire $(x, x')\mathscr{R}_2(y, y')$ si et seulement s'il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $(y, y') = (gx, gx')$).

g) On suppose X non vide. Montrer l'équivalence des propositions suivantes

(i) $\mathscr{R}_2 \implies \mathscr{R}_1$;
(ii) $\mathscr{R}_1 \implies \mathscr{R}_2$;
(iii) $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2$;
(iv) G est commutatif.

h) Montrer que, si ces conditions sont vérifiées, on a une bijection entre $(\mathrm{X} \times \mathrm{X})/\mathrm{G}$ avec G donnée par le fait que $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2$ et donc $(\mathrm{X} \times \mathrm{X})/\mathscr{R}_1 = (\mathrm{X} \times \mathrm{X})/\mathscr{R}_2$.

Moralité de l'exercice 4 : lorsqu'un groupe **commutatif** G agit **simplement et transitivement** sur un ensemble X, l'ensemble des couples d'éléments de X où on identifie deux couples lorsqu'ils « diffèrent » d'un élément de G (c'est-à-dire le quotient $(\mathrm{X} \times \mathrm{X})/\mathrm{G}$: on identifie (x, x') et (y, y') s'il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $(gx, gx') = (y, y')$) est en bijection avec G (à la classe du couple (x, x'), on associe $\Phi(x, x')$: l'élément de G qui fait passer de (x, x') qui ne dépend pas du choix de (x, x') dans la classe puisque G est commutatif). Ainsi, par transfert de structure, on peut munir $(\mathrm{X} \times \mathrm{X})/\mathrm{G}$ d'une structure de groupe abélien isomorphe à G. La loi de groupe est donnée par $(x, x') + (y, y') = (z, (\Phi(x, x')\Phi(y, y'))z)$. Attention, dans l'égalité précédente ainsi que dans les suivantes, les couples désignent en fait leur classe d'équivalence dans le quotient $(\mathrm{X} \times \mathrm{X})/\mathrm{G}$.

Montrer que dans ce cadre, on dispose de versions abstraites de la **relation de Chasles** :

$$(x, x') + (x', x'') = (x, x'')$$

et aussi de **la relation du parallélogramme** :

$$(x, x') = (x_1, x_1') \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x, x_1) = (x', x_1').$$

Les trois exemples qui suivent donc des exemples concrets de la situation de l'exercice précédent. Le premier est directement en lien avec la définition d'espace affine. Les deux autres traitent de la notion d'angle.

Exemple 4 – La direction d'un espace affine vu comme l'ensemble des bipoints équipollents. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E (voir la définition 7). Déduire de la construction précédente une bijection entre $(\mathscr{E} \times \mathscr{E})/\mathrm{E}$ (qu'on appelle l'ensemble des bipoints équipollents (voir [RDO2, 5.1.1 définition III])) et E. ∎

Pour les problèmes d'angles, on pourra consulter le livre de Frenkel [FRE, Partie 2, Chapitre V] qui est excellent sur le sujet.

Exemple 5 – Angle orienté de demi-droites dans le plan. Soient E un plan vectoriel euclidien (on ne suppose pas le plan orienté ! L'orientation ne sert qu'à mesurer les angles pas à les définir) et $\mathscr{D}'$ l'ensemble des demi-droites (d'origine O) de E. Montrer qu'on a une bijection entre $(\mathscr{D}' \times \mathscr{D}')/\mathrm{SO}(2)$ et $\mathrm{SO}(2)$. ∎

Exemple 6 – Angle orienté de droites dans le plan. Soient E un plan vectoriel euclidien (on ne suppose pas le plan orienté ! L'orientation ne sert qu'à mesurer les angles pas à les définir) et $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites (vectorielles) de E. Montrer qu'on a une bijection entre $(\mathscr{D} \times \mathscr{D})/(\mathrm{SO}(2)/\{\pm 1\})$ et $\mathrm{SO}(2)/\{\pm 1\}$. ∎

II Géométrie affine : définition d'un espace affine.

Cette partie est divisée en deux sous-parties. Dans la première sous-partie, on donne la définition d'espace affine à l'aide des notions rappelées dans la première partie. On fait aussi le lien entre les notations usuelles et les notations introduites dans la partie I. La deuxième sous-partie est, quant à elle, consacrée à l'étude d'exemples usuels d'espaces affines : espace vectoriel vu comme espace affine, espace affine produit, espace affine quotient, espace affine de fonctions.

1) La définition.

On définit maintenant la notion d'espace affine : un espace affine est un ensemble muni d'une action (pas tout à fait quelconque) d'un certain type de groupes : un groupe additif sous-jacent à un espace vectoriel.

Définition 7 – Espace affine. Soit k un corps. Un *k-espace affine* ou *espace affine sur k* est un ensemble $\mathscr{E}$ muni d'une action de groupe (du groupe sous-jacent) à un k-espace vectoriel qui est fidèle et transitive.

L'espace vectoriel agissant sur $\mathscr{E}$ est appelé la *direction de $\mathscr{E}$* ou l'*espace des translations de $\mathscr{E}$*. On définit la *dimension de $\mathscr{E}$* comme la dimension de sa direction.

On remarquera que pour la définition d'espace affine, on ne demande aucune compatibilité de l'action de k (due à la structure d'espace vectoriel) sur la direction E avec l'action de la direction sur $\mathscr{E}$. On demande simplement l'existence de cette action de k sur E de telle sorte que E soit bien un espace vectoriel. Cette structure vectorielle sur la direction révélera toute son importance lors de la définition des morphismes (c'est-à-dire des applications affines) et des sous-espaces affines.

Pour d'autres définitions (équivalentes bien sûr), voir [RDO2, 5.1.1.1°], [FRE, Chapitre I.1], [BER, 2.1.6] ou encore [AUD].

Notation 8 – Action de groupe et espace affine. Soient k un corps, $\mathscr{E}$ un k-espace affine et E sa direction. On considère $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ et $u \in \mathrm{E}$. Plutôt que de noter l'action de u sur A de façon habituelle par $u\mathrm{A}$ ou $u \cdot \mathrm{A}$, on utilise la notation $\mathrm{A} + u$.

De même, plutôt que de noter $\Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, l'image de (A, B) par l'application Φ associée à l'action simple et transitive de $\mathscr{E}$ sur E (voir la question **b** de l'exercice 4), on utilise la notation $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ pour $\Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. Ainsi par définition de Φ et des notations, on a $\mathrm{A} + \Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{B}$.

Enfin, pour $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, on note $\varphi_{\mathrm{A}} : \mathrm{E} \to \mathscr{E}$ la bijection associée à A. Par transfert de structure via φ_{A}, on peut munir $\mathscr{E}$ d'une structure d'espace vectoriel d'origine A qu'on appelle le *vectorialisé de $\mathscr{E}$ en* A. On le note alors $\mathscr{E}_{\mathrm{A}}$ (pour rappeler le choix de l'origine).

Remarque 9 – Relation de Chasles. La relation $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = 0$ n'est alors que la réécriture de l'axiome « $1 \cdot x = x$ pour tout x » des actions de groupes. La relation de Chasles n'est alors qu'une réécriture de l'axiome

$$\forall\, g, g' \in \mathrm{G}, \quad \forall\, x \in \mathrm{X}, \qquad (gg')x = g(g'x)$$

des actions de groupes. En effet, par définition, on a

$$\mathrm{A} + (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) = (\mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \mathrm{B} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \mathrm{C}.$$

Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \in \mathrm{E}$ envoie A sur C donc est égal à $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (voir la question **b** de l'exercice 4 ou la moralité de ce même exercice). ■

L'exercice qui suit fournit un exemple original d'espace affine. Il est aussi l'occasion de faire un peu de théorie des groupes et de compléter l'étude des groupes non abéliens d'ordre pq avec p, q deux nombres premiers distincts.

Exemple 10 – Un exemple d'espace affine un peu bizarre. Soit G un groupe **non abélien** d'ordre pq avec p, q deux nombres premiers vérifiant $p < q$.

a) Montrer que $p \mid q - 1$.

b) Munir l'ensemble des p-Sylow de G d'une structure de droite affine sur $\mathbb{F}_q$.

c) Montrer que l'action de $g \in \mathrm{G}$ par conjugaison sur l'ensemble des p-Sylow est affine. En déduire que G est un sous-groupe du groupe des bijections affines d'une droite affine.

d) Retrouver le résultat de la question précédente, en utilisant la classification des groupes d'ordre pq, la cyclicité du groupe ${\mathbb{F}_q}^\times$, la description analytique du groupe GA des bijections affines d'une droite affine (une telle transformation est donnée par $x \mapsto ax + b$ avec $b \in \mathbb{F}_q$ et $a \in {\mathbb{F}_q}^\times$) et la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_q \xrightarrow{\ t\ } \mathrm{GA} \xrightarrow{\ d\ } {\mathbb{F}_q}^\times \longrightarrow 1$$

où d est l'application qui a $x \mapsto ax + b$ associe a et t est l'application à b associe $x \mapsto x + b$.

L'utilisation de cette suite exacte est tout à fait normale : il s'agit de la suite structurelle du groupe affine (ce n'est rien d'autre que la suite **(GA)** de l'exercice 19 en dimension 1).

Remarque 11 – Calcul différentiel et espace affine. [BER, 2.7.7] La place naturelle du calcul différentiel et particulièrement la définition d'application différentiable est en fait dans un espace affine. Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux $\mathbb{R}$-espaces affines (de dimension finie) de direction respective E et F et $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathscr{E}$. On dit que $f : \mathscr{U} \to \mathscr{F}$ est différentiable en $\mathrm{A} \in \mathrm{U}$ s'il existe $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que $f(\mathrm{A} + \overrightarrow{h}) = f(\mathrm{A}) + u(\overrightarrow{h}) + \mathrm{o}(h)$. En effet, les expressions $\mathrm{A} + \overrightarrow{h} \in \mathscr{E}$ et $f(\mathrm{A}) + u(\overrightarrow{h}) \in \mathscr{F}$ prennent tout leur sens dans un espace affine.

L'utilisation de l'affine met en avant la dissociation entre l'espace de départ de l'application f (qui est l'espace affine) et celui de sa différentielle en un point (qui est la direction de l'espace affine). Elle explique aussi la dissymétrie entre le x et le h dans la définition de différentiabilité. Cette dissociation sera encore plus présente lors de l'étude des sous-variétés. ■

2) Exemples standards de construction d'espaces affines.

Les exercices 5 à 8 fournissent des exemples classiques d'espaces affines qui apparaissent régulièrement dans les applications. Pour pouvoir regrouper tout dans un seul exercice portant sur le même sujet, ils anticipent largement sur les notions présentées par la suite. On pourra donc commencer par les premières questions de chacun pour y revenir par la suite.

L'exercice 5 présente la structure affine canonique d'un espace vectoriel : celle à laquelle on ne pense plus tellement on s'en est déjà servi. Il est **indispensable** de repasser 5 minutes à réfléchir dessus. L'exercice 6 présente la notion d'espace affine produit (on vérifie en particulier que c'est bien un produit catégorique). L'exercice 7 présente l'espace affine des fonctions à valeurs dans un espace affine : comme d'habitude, les fonctions à valeurs dans quelque chose hérite de la structure de ce quelque chose. Enfin, l'exercice 8 s'attarde sur le lien entre quotient et espace affine. Ces trois derniers exercices peuvent être fait uniquement en seconde lecture.

Exercice 5 – Espace vectoriel – espace affine. [FRE, Chapitre I.2.1] Soit E un k-espace vectoriel.

a) Montrer que l'action de translation (à gauche) munit E d'une structure de k-espace affine.

b) *Barycentre dans un espace vectoriel.* Soient $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'éléments de E et $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}} \in k^{(\mathrm{I})}$ tels que

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i \neq 0.$$

Calculer le barycentre de la famille $(x_i, \lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$.

c) *Applications affines entre espace vectoriel.* Soit F un k-espace vectoriel muni de sa structure affine. Déterminer la forme des applications affines de E dans F.

d) *Sous-espace affine d'un espace vectoriel.* Déterminer les sous-espace affines de E.

e) Montrer qu'un sous-espace affine $\mathscr{F}$ de E engendre l'espace vectoriel E si et seulement si $\mathscr{F}$ est un hyperplan affine non vectoriel ou $\mathscr{F} = \mathrm{E}$.

Exercice 6 – Espace affine produit. [FRE, Chapitre I.2.3] Soient $(\mathscr{E}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de k-espaces affines (pour ceux qui préfèrent, on peut se restreindre à $\mathrm{I} = \{1, 2\}$).

a) Munir $\prod_{i\in \mathrm{I}} \mathscr{E}_i$ d'une structure de k-espace affine dont on donnera la direction.

b) *Applications affines issues d'un produit.* Soit $i \in \mathrm{I}$, montrer que $p_i : \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathscr{E}_i \longrightarrow \mathscr{E}_i$ est affine ; donner $\overrightarrow{p_i}$.

c) *Applications affines à valeurs dans un produit.* Soient $\mathscr{F}$ un k-espace affine et

$$f : \mathscr{F} \longrightarrow \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathscr{E}_i$$

une application. Montrer que f est affine si et seulement si $p_i \circ f$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. Autrement dit, se donner une application affine à valeurs dans un produit revient à se donner une application affine à valeurs dans chacun des $\mathscr{E}_i$.

d) *Barycentre dans un produit.* Soient $(\mathrm{A}_j)_{j\in \mathrm{J}}$ une famille d'éléments de $\prod_{i\in \mathrm{I}} \mathscr{E}_i$ où $\mathrm{A}_j = (x_i^{(j)})_{i\in \mathrm{I}}$ et $(\lambda_j)_{j\in \mathrm{J}} \in k^{(\mathrm{J})}$ tels que

$$\sum_{j\in \mathrm{J}} \lambda_j \neq 0.$$

Déterminer le barycentre de la famille $(\mathrm{A}_j, \lambda_j)_{j\in \mathrm{J}}$.

e) *Sous-espace affine dans un produit.* Pour tout $i \in \mathrm{I}$, on fixe $\mathscr{F}_i$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}_i$. Montrer que $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathscr{F}_i$ est un sous-espace affine de $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathscr{E}_i$. Quel est sa direction ? Existe-t-il d'autres sous-espaces affines ?

Exercice 7 – Applications à valeurs dans un espace affine. Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E et X un ensemble.

a) Munir $\mathscr{E}^{\mathrm{X}} = \mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathscr{E})$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathscr{E}$ d'une structure d'espace affine. Donner la direction de cet espace.

b) *Barycentre d'applications.* Soient $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'applications affines de X dans $\mathscr{E}$ et $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}} \in k^{(\mathrm{I})}$ tels que

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i \neq 0.$$

Déterminer l'application barycentre de la famille $(f_i, \lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

c) *Fonctions affines issues de $\mathscr{E}^{\mathrm{X}}$.* Soit $x \in \mathrm{X}$. Montrer que l'application $f \in \mathscr{E}^{\mathrm{X}} \mapsto f(x) \in \mathscr{E}$ est affine.

d) *Fonctions affines à valeurs dans $\mathscr{E}^{\mathrm{X}}$.* Soient $\mathscr{F}$ un espace affine et $f : \mathscr{F} \to \mathscr{E}^{\mathrm{X}}$. Montrer que f est affine si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{X}$, l'application $\mathrm{A} \in \mathscr{F} \mapsto f(\mathrm{A})(x) \in \mathscr{E}$ est affine.

e) *Sous-espace affine de $\mathscr{E}^{\mathrm{X}}$.* Pour chaque $x \in \mathrm{X}$, on fixe $\mathscr{F}_x$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$. Montrer que

$$\left\{ f \in \mathscr{E}^{\mathrm{X}}, \quad f(x) \in \mathscr{F}_x \right\}$$

est un sous-espace affine de $\mathscr{E}^{\mathrm{X}}$. En existe-t-il d'autres ?

Exercice 8 – Espace affine quotient. [FRE, Chapitre I.2.4] Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que la relation $\mathrm{A}\mathscr{R}_{\mathrm{F}}\mathrm{B}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \in \mathrm{F}$ est une relation d'équivalence.

b) Munir $\mathscr{E}/\mathscr{R}_{\mathrm{F}}$ (qu'on note plutôt $\mathscr{E}/\mathrm{F}$) d'une structure de k-espace affine dont on donnera la direction.

c) Montrer que la surjection canonique $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathrm{F}$ est affine et déterminer $\overrightarrow{\pi}$.

d) Réciproquement, soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur $\mathscr{E}$. On suppose que $\mathscr{E}/\mathscr{R}$ est muni d'une structure d'espace affine telle que la surjection canonique $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathscr{R}$ soit une application affine. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_{\mathrm{F}}$.

e) Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine. Montrer que f passe au quotient par $\mathscr{R}_{\mathrm{F}}$ si et seulement si $\mathrm{F} \subset \mathrm{Ker}\ \overrightarrow{f}$.

III Barycentre.

La géométrie affine est le monde des barycentres. C'est l'outil et l'objet intrinsèque (on ne repasse pas par de l'algèbre linéaire) attaché à la géométrie affine. La condition d'existence des barycentres est très simple : la somme des coefficients doit être non nulle ! Mais il ne faut pas l'oublier ! L'exercice qui suit, **à faire absolument**, donne la démonstration de l'existence et de l'unicité du barycentre, le tout reposant uniquement sur la relation de Chasles.

Exercice 9 – Définition des barycentres. [RDO2, 5.1.2], [FRE, Chapitre III.3], [AUD] Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E, I un ensemble, $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathscr{E}^{\mathrm{I}}$ une famille d'éléments de $\mathscr{E}$ et $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}} \in k^{(\mathrm{I})}$ une famille d'éléments de k telle que l'ensemble des $i \in \mathrm{I}$ vérifiant $\lambda_i \neq 0$ est fini.

a) Montrer que si $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i = 0$ alors le vecteur $u_{\mathrm{M}} = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i}$ ne dépend pas de M puis que l'ensemble des solutions de l'équation $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i \overrightarrow{\mathrm{GA}_i} = 0$ d'inconnue $\mathrm{G} \in \mathscr{E}$ est $\varnothing$ ou $\mathscr{E}$.

b) Si $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i \neq 0$ alors il existe une unique solution à l'équation $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i \overrightarrow{\mathrm{GA}_i} = 0$ d'inconnue $\mathrm{G} \in \mathscr{E}$. Cette solution G vérifie

$$\forall\, \mathrm{M} \in \mathscr{E}, \qquad \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i \right) \overrightarrow{\mathrm{MG}} = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i}$$

On dit que G est le *barycentre du couple* $((\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}, (\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}})$ ou encore le *barycentre des* A_i *affectés des coefficients* λ_i ou encore *barycentre des points massiques* $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

On remarquera que la démonstration précédente repose uniquement sur la relation de Chasles qui est d'ailleurs « le seul outil » à notre disposition pour le moment.

Dans les deux remarques et les deux exercices qui suivent, on étudie les propriétés élémentaires du barycentre. Les deux propriétés vraiment importantes étant celle d'associativité et de désassociativité du barycentre (puisqu'elles sont à la base de nombreux résultats usuels).

Remarque 12 – Commutativité du barycentre. [RDO2, 5.1.2.1°c] Supposons que nous sommes dans la situation de la question **b** de l'exercice 9 et considérons $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$. Montrer que le barycentre des points massiques $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est aussi le barycentre des points massiques $(\mathrm{A}_{\sigma(i)}, \lambda_{\sigma(i)})_{i\in\mathrm{I}}$. ∎

Remarque 13 – Poids. [RDO2, 5.1.2.1°b] Supposons que nous sommes dans la situation de la question **b** de l'exercice 9 et considérons $\lambda \in k^\times$. Montrer que le barycentre des points massiques $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est aussi le barycentre des points massiques $(\mathrm{A}_i, \lambda\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

Montrer aussi que le barycentre d'une famille de point massique ne change pas si on ajoute ou retire des points de masse nulle. ∎

Exercice 10 – Associativité du barycentre. [RDO2, 5.1.2.2° Théorème I] [FRE, III.3.proposition 2] Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E, I un ensemble, $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathscr{E}^{\mathrm{I}}$ une famille d'éléments de $\mathscr{E}$ et $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}} \in k^{(\mathrm{I})}$ une famille d'éléments de k telle que l'ensemble des $i \in \mathrm{I}$ vérifiant $\lambda_i \neq 0$ est fini. On suppose que $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i \neq 0$.

Soit $(\mathrm{I}_j)_{j\in\mathrm{J}}$ une partition de I telle que, pour tout $j \in \mathrm{J}$, on ait

$$\sigma_j := \left(\sum_{i\in\mathrm{I}_j} \lambda_i\right) \neq 0.$$

On note G_j le barycentre de $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)_{i\in\mathrm{I}_j}$. Montrer que le barycentre de $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et le barycentre de $(\mathrm{G}_j, \sigma_j)_{j\in\mathrm{J}}$ coïncident.

Exercice 11 – Désassociativité du barycentre. [RDO2, 5.1.2.2° Théorème II] [FRE, III.3.proposition 3] Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E, J un ensemble, $(\mathrm{G}_j)_{j\in\mathrm{J}} \in \mathscr{E}^{\mathrm{J}}$ une famille d'éléments de $\mathscr{E}$ et $(\sigma_j)_{j\in\mathrm{J}} \in k^{(\mathrm{J})}$ une famille d'éléments de k telle que l'ensemble des $j \in \mathrm{J}$ vérifiant $\sigma_j \neq 0$ est fini. On suppose que $\sum\limits_{j\in\mathrm{J}} \sigma_j \neq 0$.

Soit I un ensemble et considérons une famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathscr{E}^{\mathrm{I}}$. Pour $j \in \mathrm{J}$, on suppose qu'il existe une famille $(\lambda_{ij})_{i\in\mathrm{I}} \in k^{(\mathrm{I})}$ de somme non nulle telle que G_j soit barycentre de $(\mathrm{A}_i, \lambda_{ij})$. Pour $i \in \mathrm{I}$, on pose

$$\lambda_i = \sum_{j\in\mathrm{J}} \sigma_j \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_{ij}\right)^{-1} \lambda_{ij}.$$

Montrer que le barycentre de $(\mathrm{G}_j, \sigma_j)_{j\in\mathrm{J}}$ et le barycentre de $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ coïncident.

Les propriétés d'associativité et de désassociativité du barycentre ne sont pas simples à énoncer dans toute leur généralité, alors qu'elles sont très simples à utiliser en pratique. En voici une liste d'exemples. Les exercices 12 et 14 sont des grands classiques qu'il est délicat de ne pas avoir vu. L'exemple 15 qui n'est pas très intéressant en lui-même sert par contre dans de nombreux exercices : on peut le voir comme une sorte de lemme à retenir. L'exemple 16 et l'exercice 13, quant à eux, proposent de démontrer des résultats connus depuis le collège ou le lycée dans ce nouveau cadre. L'exercice 15 vous rappellera sûrement des souvenirs de Terminale mais pose aussi quelques questions purement géométriques.

Exemple 14 – Un exemple de désassociativité. On suppose que G est le barycentre de (G_1, σ_1), (G_2, σ_2), que G_1 est le barycentre de (A, α_1), (B, β_1), (C, γ_1) et G_2 est le barycentre de (A, α_2), (B, β_2), (C, γ_2). Montrer que G est le barycentre de

$$\left(\mathrm{A}, \frac{\sigma_1\alpha_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} + \frac{\sigma_2\alpha_2}{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\right), \left(\mathrm{B}, \frac{\sigma_1\beta_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} + \frac{\sigma_2\beta_2}{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\right), \left(\mathrm{C}, \frac{\sigma_1\gamma_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} + \frac{\sigma_2\gamma_2}{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\right)$$

Exemple 15 – Un exemple d'associativité du barycentre. [AUD] Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois points non alignés et α, β, γ tel que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. On note $\mathrm{G} = \mathrm{Bar}((\mathrm{A}, \alpha), (\mathrm{B}, \beta), (\mathrm{C}, \gamma))$.

Montrer que (AG) et (BC) sont parallèles si et seulement si $\beta+\gamma = 0$. On suppose que $\beta+\gamma \neq 0$. Montrer que l'intersection de (AG) et (BC) est le barycentre de (B, β) et (C, γ). ∎

Exemple 16 – Un autre exemple d'associativité du barycentre. [FRE, III.3 exercice 3] Soit k un corps de caractéristique différente de 2 et 3.

On se place dans un plan affine sur k. Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes en l'isobarycentre des sommets et que cet isobarycentre est situé en à 2/3 de la médiane en partant du sommet.

On se place dans un k-espace affine de dimension 3. Montrer que les 4 « médianes » d'un tétraèdre (c'est-à-dire la droite passant un sommet et l'isobarycentre de la face opposée) sont concourantes en l'isobarycentre des sommets et que cet isobarycentre est situé au 3/4 de la médiane en partant du sommet.

Exercice 12 – Encore un autre exemple d'associativité du barycentre : Théorèmes de Ménélaüs et Ceva. Soient A, B, C un triangle et M, N, P appartenant respectivement à (BC), (AC) et (AB) et n'étant pas sur les sommets.

Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1\,.$$

Montrer que (AM) (BN) et (CP) sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1\,.$$

Pour approfondir l'étude de cette configuration, écrire une condition (en terme de produit de rapport de longueur algébrique) pour que (MN) soit parallèle à (AB). Peut-elle être vérifiée dans le premier ou le second cas ? Pour d'autres démonstrations des théorèmes de Ménélaüs et Ceva, voir [SOR, p.16 à 25].

Exercice 13 – Parallélogramme et associativité du barycentre. [RDO2, 5.1.2.3°] [FRE, III.3 exercice 2] Soient $\mathscr{E}$ un k-plan affine et A, B, C, D quatre points distincts de $\mathscr{E}$

a) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

(i) (AB)//(CD) et (AD)//(BC) ;

(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;

(iii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Si la caractéristique de k est différente de 2, les items précédents sont équivalents à

(iv) [AC] et [BD] ont le même milieu.

Si $\mathscr{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace affine euclidien, les items précédents sont équivalents à

(v) $AB = CD$ et $AD = BC$.

Si (A, B, C, D) vérifie ces propriétés, on dit que c'est un parallélogramme.

b) On suppose ici que la caractéristique de k est différente de 2. Soient (A, B, C, D) quatre points de $\mathscr{E}$. On note I_1 le milieu de [AB], I_2 le milieu de [BC], I_3 le milieu [CD] et I_4 le milieu de [DA]. Montrer que (I_1, I_2, I_3, I_4) est un parallélogramme.

Dans l'exercice qui suit, on donne quelques exemples de barycentres classiques en géométrie euclidienne.

Exercice 14 – Quelques exemples de barycentres. Soient $\mathscr{E}$ un plan affine **euclidien** et A, B, C un (vrai) triangle de $\mathscr{E}$.

a) Montrer que O le centre du cercle circonscrit à A, B, C est barycentre de $(A, \sin 2\widehat{A}), (B, \sin 2\widehat{B}), (C, \sin 2\widehat{C})$. On commencera par montrer que O existe bien ! [SOR, p.110]

b) Montrer que H l'orthocentre du triangle A, B, C est le barycentre de $(A, \tan \widehat{A}), (B, \tan \widehat{B}), (C, \tan \widehat{C})$ (si A, B, C n'est pas rectangle). En déduire dans quelle situation H est à l'intérieur de A, B, C. On commencera par montrer que H existe bien ! [SOR, p.108]

c) Montrer que I le centre du cercle inscrit au triangle A, B, C est le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c). On commencera par montrer que I existe bien ! [SOR, p.112]

d) Si M est intérieur au triangle A, B, C, montrer que M est le barycentre des points massiques $(A, \text{aire}(MBC))$, $(B, \text{aire}(MAC))$ et $(C, \text{aire}(AMB))$. [SOR, p.112]

e) Si M est un point d'un plan, montrer que $M = \text{Bar}(A, \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}), (B, \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})), (C, \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})))$. [AUD]

L'exercice qui suit propose l'étude de quelques lignes de niveaux qui font intervenir les barycentres.

Exercice 15 – Ligne de niveau et Barycentre. [RDO2, 6.1.1.5°] Soit $\mathscr{E}$ un espace affine **euclidien**.

a) Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de $\mathscr{E}$ et $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^{(I)}$. Déterminer les lignes de niveau de la fonction $M \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i {MA_i}^2$ (attention à la condition d'existence des barycentres).

b) Soient $A, B \in \mathscr{E}$. Déterminer les lignes de niveaux de $M \mapsto MA/MB$.

c) Soient A, B, C' alignés avec $C' \in]\,A\,,B\,[$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que C' soit le pied de la bissectrice issue de M dans le triangle M, A, B.

d) On suppose que $\mathscr{E}$ est un plan affine euclidien. Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ deux cercles de $\mathscr{E}$. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tel que le rapport de la puissance de M par rapport à $\mathscr{C}$ et de la puissance de M par rapport à $\mathscr{C}'$ soit constant.

IV Applications affines.

Comme dans toutes les structures algébriques, plus encore que la structure elle-même, ce qui compte, ce sont les applications qui conservent la structure : les morphismes. Dans le cadre de la géométrie affine, elles s'appellent « applications affines ».

Cette partie est divisée en trois sous-parties. Dans la première partie, on trouve la (ou plutôt les) définition(s) d'« application affine » et les inéluctables commentaires l'accompagnant (remarques 18 à 20), on insiste aussi lourdement sur la flèche d'une application affine (exercice 17) qui sert en permanence. Enfin, on termine par l'étude de l'espace des applications affines.

La deuxième sous-partie est consacrée aux premiers exemples d'applications affines : les homothéties et les translations. Il s'agit d'applications affines qui se caractérisent par des données simples : les homothéties (un centre et un rapport), les translations (un vecteur). On étudie aussi les applications affines dont on connaît la flèche et l'image d'un point (exercice 25).

La troisième partie se résume à long exercice indispensable sur le groupe affine qui est à la fois l'occasion de revoir ce qu'on sait sur le groupe linéaire mais aussi de l'appliquer.

1) Définition et caractérisations des applications affines.

J'ai choisi de définir les applications linéaires en me ramenant à l'algèbre linéaire (et non pas en utilisant les barycentres (voir pour cela l'exercice 16)) pour mettre en avant le rôle fondamental de la flèche (car comme le dit Mneimné, « je mets une mauvaise note à une leçon de géométrie affine qui ne parle pas de l'application flèche ! »). L'outil « flèche » est un outil fondamental de la géométrie affine. Il est important de bien le comprendre et de savoir le manipuler. En particulier, le fait que les items de la définition 17 sont équivalents **doit** devenir une banalité. L'autre intérêt de cette définition des applications affines en revenant à l'algèbre linéaire est mettre en avant l'action du corps de base sur la direction. Elle n'apparaît pas vraiment dans la définition d'espace affine (voir la définition 7) alors qu'elle est explicitement présente dans la définition des applications affines puisque u (voir ci-dessous pour le sens de u) doit commuter avec l'action des éléments de k le corps de base.

Remarquer que les axiomes de la définition 17 se groupent par deux (**a** et **e**, **b** et **f**, **c** et **g** et **d** et **h**) sous la forme « je peux changer *il existe* en un *pour tout* ». Cette propriété, omniprésente en géométrie affine (voir l'exercice 16, l'exercice 20 ou encore la question **e** de l'exercice 22) se résume par : « si c'est vrai à un endroit c'est vrai partout ».

Définition 17 – Application affine. [RDO2, 5.3.1], [AUD] Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux k-espaces affines de direction respectives E et F et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

a $\exists\, u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\quad \forall\, \mathrm{O},\mathrm{M} \in \mathscr{E},\qquad f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{O}) + u(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$;

b $\exists\, u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\quad \forall\, \mathrm{O},\mathrm{M} \in \mathscr{E},\qquad \overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{M})} = u(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$;

c $\exists\, u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\quad \forall\, \mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathscr{E},\qquad \Phi_{\mathscr{F}}(f(\mathrm{A}),f(\mathrm{B})) = u(\Phi_{\mathscr{E}}(\mathrm{A},\mathrm{B}))$;

d $\exists\, u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\quad \forall\, \mathrm{A} \in \mathscr{E},\quad \forall\, x \in \mathrm{E},\qquad f(\mathrm{A}+x) = f(\mathrm{A}) + u(x)$;

e $\exists\, u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\quad \exists\, \mathrm{O} \in \mathscr{E},\quad \forall\, \mathrm{M} \in \mathscr{E},\qquad f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{O}) + u(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$;

f $\exists\, u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\quad \exists\, \mathrm{O} \in \mathscr{E},\quad \forall\, \mathrm{M} \in \mathscr{E},\qquad \overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{M})} = u(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$;

g $\exists\, u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\quad \exists\, \mathrm{A} \in \mathscr{E},\quad \forall\, \mathrm{B} \in \mathscr{E},\qquad \Phi_{\mathscr{F}}(f(\mathrm{A}),f(\mathrm{B})) = u(\Phi_{\mathscr{E}}(\mathrm{A},\mathrm{B}))$.

h $\exists\, u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\quad \exists\, \mathrm{A} \in \mathscr{E},\quad \forall\, x \in \mathrm{E},\qquad f(\mathrm{A}+x) = f(\mathrm{A}) + u(x)$.

Si f vérifie ces propriétés, on dit que f est une *application affine*. On note $\mathscr{A}(\mathscr{E},\mathscr{F})$ l'ensemble des applications affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

Vérifier que dans chacun des items équivalents de la définition, l'application linéaire u est uniquement définie par f et les huit applications linéaires obtenues sont en fait toutes identiques. On note cette application linéaire $\overrightarrow{f}$ et on dit que c'est la *flèche de* f.

Ici nous avons choisi de définir les applications affines en utilisant la structure linéaire sous-jacente. Dans l'exercice qui suit, on voit qu'on peut utiliser pour les caractériser l'outil purement affine que sont les barycentres (caractérisation (vi)). Il est **indispensable** de savoir démontrer l'équivalence entre (i) et (vi) rapidement et surtout de retenir que les applications affines sont précisément les applications qui conservent les barycentres.

Citons pour la culture et ceux qui veulent aller plus loin : le théorème fondamental de la géométrie affine. Il donne une autre caractérisation des applications affines : ce sont (enfin presque) les applications qui conservent l'alignement (voir le livre de Frenkel [FRE, Chapitre V] pour une démonstration et des détails sur le « enfin

presque »).

Exercice 16 — Caractérisation des applications affines. [FRE, II.1] [BER, 2.3.1] [RDO2, 5.3.1.2°] Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux k-espaces affines de direction respectives E et F et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une application affine.
(ii) Il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ tel que f soit une application linéaire de $\mathscr{E}_\mathrm{A}$ dans $\mathscr{F}_{f(\mathrm{A})}$.
(iii) Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, l'application f est une application linéaire de $\mathscr{E}_\mathrm{A}$ dans $\mathscr{F}_{f(\mathrm{A})}$.
(iv) Il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ tel que l'application $f_\mathrm{A} = {\varphi_{f(\mathrm{A})}}^{-1} \circ f \circ \varphi_\mathrm{A} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ soit linéaire. (Indication : on pourra utiliser la remarque 19)
(v) Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, l'application $f_\mathrm{A} = {\varphi_{f(\mathrm{A})}}^{-1} \circ f \circ \varphi_\mathrm{A} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est linéaire.
(vi) L'application f conserve les barycentres.
(vii) L'application f conserve le barycentre de trois points.

De plus, si car$k \neq 2$, les propositions précédentes sont équivalentes à

($viii$) L'application f conserve les barycentres de deux points.

Les deux remarques qui suivent mettent en exergue deux résultats qui apparaissent dans la démonstration précédente.

Remarque 18 — Lorsqu'on utilise le transfert de structure. [FRE, II.1 lemme 1] S'il existe un point $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ tel que l'application $f_\mathrm{A} = {\varphi_{f(\mathrm{A})}}^{-1} \circ f \circ \varphi_\mathrm{A} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ soit linéaire alors, $f_\mathrm{M} = f_\mathrm{A}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ et c'est l'application $\overrightarrow{f}$. ■

Remarque 19 — Vectorialisation ou non. Montrer que l'application $\varphi_\mathrm{A} : \mathrm{E} \to \mathscr{E}_\mathrm{A}$ est linéaire. En déduire que l'application $\varphi_\mathrm{A} : \mathrm{E} \to \mathscr{E}$ est affine et calculer $\overrightarrow{\varphi_\mathrm{A}}$.

La remarque 20 propose de prendre le temps de réfléchir un peu plus à la caractérisation ($viii$) des fonctions affines et d'étudier pourquoi ça ne marche pas en caractéristique 2.

Remarque 20 — Le problème de la caractéristique 2. Sur $\mathbb{F}_2$, montrer que toutes les applications respecte le barycentre de deux points. Montrer que toutes les applications ne sont pas affines.

Une autre illustration des problèmes de la caractéristique 2 : on ne peut pas appliquer l'associativité du barycentre au système $(\mathrm{A}, 1), (\mathrm{B}, 1), (\mathrm{C}, 1)$ pour réduire le nombre de points (on ne peut pas remplacer $(\mathrm{A}, 1)$, $(\mathrm{B}, 1)$ par leur barycentre). En caractéristique différente de 2, pour montrer que ($viii$) implique (vii) : on considère $(\mathrm{A}, \alpha), (\mathrm{B}, \beta), (\mathrm{C}, \gamma)$ et quitte à permuter les points, on peut supposer que $\alpha + \beta \neq 0$ (sinon on aurait $2(\alpha + \beta + \gamma) = 0$). ■

La propriété fondamentale de la flèche des applications affines est donnée dans l'exercice suivant. Elle est fondamentale car elle assure que prendre la flèche d'applications linéaires donne beaucoup d'informations sur l'application affine en question. Ainsi, on ramène (au moins partiellement et même complètement si on a un point fixe) l'étude d'une application affine à de l'algèbre linéaire : « ce qui est facile ! »

Ce passage à la flèche est la base de l'étude du groupe affine et de ses sous-groupes (voir l'exercice 19) : les groupes des homothéties-translations, et dans le cas d'un espace affine euclidien, les groupes des isométries ou celui des similitudes (voir l'exercice 15 de la feuille de géométrie affine euclidienne).

Exercice 17 — Fonctorialité. [RDO2, 5.3.1.2°] [FRE, II.3 proposition 2] Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ trois espaces affines et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ et $g : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ deux applications affines. Montrer que $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{\mathrm{Id}_\mathscr{E}} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

L'exercice qui suit est très similaire à l'exercice 7. Ce similarité provient du fait que $\mathscr{A}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ est en fait un sous-espace affine de $\mathscr{F}^\mathscr{E}$.

Exemple 21 — Espace des applications affines. [FRE, II.3 Théorème 2] Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux k-espaces affines de direction respectives E et F, montrer que l'ensemble $\mathscr{A}(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ est un espace affine dont on donnera la direction et la dimension lorsque $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont de dimension finie.

Soient $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'applications affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ et $(\lambda_i)_{i \in \mathrm{I}} \in k^{(\mathrm{I})}$ tel que

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i \neq 0.$$

Déterminer l'application affine barycentre de la famille $(f_i, \lambda_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$. En déduire (à l'aide de l'exemple 22) que, si k est un corps de caractéristique différente de 3, l'application $\mathrm{M} \mapsto$ Isobarycentre de AMB est une application affine.

Montrer, à l'aide de l'exercice 6, que si k n'est pas de caractéristique 2, l'application

$$\begin{cases} \mathscr{E}^2 & \longrightarrow \mathscr{E} \\ (\mathrm{A},\mathrm{B}) & \longmapsto \text{milieu de [AB]} \end{cases}$$

est affine. ∎

2) Exemples concrets d'applications affines.

Les exemples 22 à 25 présentent une certain nombre d'applications affines classiques qu'il est indispensable d'avoir à sa disposition. On définit en particulier les translations (exemple 23), les homothéties (exemple 24) et on donne un moyen de construire les applications affines dont la flèche est donnée (exemple 25). Pour d'autres exemples d'applications affines usuelles (sans structure supplémentaire), on pourra aller voir à l'exercice 24.

Exemple 22 – Application constante. [FRE, II.2 exemple 1] Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux k-espaces affines et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application constante. Montrer que f est affine et que $\overrightarrow{f} = 0$. Réciproquement, si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est affine et $\overrightarrow{f} = 0$, montrer que f est constante. ∎

Exemple 23 – Translation. [FRE, II.2 exemple 2] Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E. Pour $t \in \mathrm{E}$, on définit l'application

$$\tau_t : \begin{cases} \mathscr{E} & \longrightarrow \mathscr{E} \\ \mathrm{A} & \longmapsto \mathrm{A} + t \end{cases}$$

Montrer que τ_t est affine et que $\overrightarrow{\tau_t} = \mathrm{id}$ (voir aussi le lien avec la relation (**1**) ci-dessous). Réciproquement, soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_\mathrm{E}$. Montrer qu'il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que $f = \tau_t$.

Soient $t, u \in \mathrm{E}$. Montrer que $\tau_t = \tau_u$ si et seulement si $t = u$ (remarquer que c'est synonyme du fait que l'action est fidèle).

Soient $t, u \in \mathrm{E}$. Montrer que $\tau_{t+u} = \tau_t \circ \tau_u$ et que $\tau_0 = \mathrm{id}_\mathscr{E}$ (remarquer que ces relations sont en fait exactement synonymes des axiomes des actions de groupe). En déduire que, pour $t \in \mathrm{E}$, τ_t est une bijection affine de $\mathscr{E}$ dans lui-même de bijection inverse τ_{-t}.

Finalement, on a construit un isomorphisme de groupes entre le groupe additif sous-jacent à E et le groupe des bijections affines f de $\mathscr{E}$ dans lui-même telles que $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_\mathrm{E}$. Cet isomorphisme est donné par $t \mapsto \tau_t$. ∎

Exemple 24 – Homothétie. [FRE, II.2 exemple 3] Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$. On définit l'homothétie de centre A et de rapport λ par $h_{\mathrm{A},\lambda} : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{A} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ (remarquer le lien avec la formule (**1**) ci-dessous). Montrer que $h_{\mathrm{A},\lambda}$ est affine et que $\overrightarrow{h_{\mathrm{A},\lambda}} = \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et $h_{\mathrm{A},\lambda}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$.

Réciproquement, soit f une application affine telle que $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}$ avec $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$. Montrer que f admet un unique point fixe qu'on note A et que $f = h_{\mathrm{A},\lambda}$. ∎

Les trois exemples précédents peuvent se résumer par si f est une application telle que $\overrightarrow{f}$ soit une homothétie de E alors f est constante si le rapport est nul, une translation si le rapport est 1, une homothétie affine sinon.

Après avoir présenté les homothéties et les translations, en voici une première caractérisation géométrique. Pour une utilisation géométrique du groupe des homothéties-translations, on pourra aller voir la question **h** de l'exercice 27 ou encore [TIS, p.65-66] (par exemple une démonstration des théorèmes de Pappus ou Desargues).

Exercice 18 – Homothétie-translation. Encore un avatar du fait qu'une homothétie vectorielle est caractérisée par le fait que tout vecteur est transformé en un vecteur proportionnel. Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine. On suppose que pour toute droite D de $\mathscr{E}$, $f(\mathrm{D})$ est une droite de $\mathscr{E}$ parallèle à D. Montrer que f est une homothétie ou une translation.

En anticipant sur l'exercice 19, montrer que l'ensemble formé des homothéties et des translations est un sous-groupe distingué du groupe des bijections affines $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$.

L'exercice montre que pour construire une application affine, il suffit de se donner l'image d'un point et la flèche et donne une formule explicite pour cela (c'est la relation (**1**)). Ceci montre en particulier la surjectivité de l'application « flèche » qui sera fondamentale pour l'exercice 19.

Exemple 25 – Surjectivité de l'application flèche. [FRE, II.2 exemple 5] Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux k-espaces affines, $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, $\mathrm{B} \in \mathscr{F}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Montrer qu'il existe une unique application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ vérifiant $\overrightarrow{f} = u$ et $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et vérifier que cette application f est donnée par

$$f : \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{B} + u(\overrightarrow{\mathrm{AM}}) \qquad (\mathbf{1})$$

En déduire que l'application

$$\overrightarrow{\cdot}: \begin{cases} \mathscr{A}(\mathscr{E},\mathscr{F}) & \longrightarrow \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \\ f & \longmapsto \overrightarrow{f} \end{cases}$$

est surjective et que pour $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ fixé, l'application

$$\Delta_{\mathrm{A}}: \begin{cases} \mathscr{A}(\mathscr{E},\mathscr{F}) & \longrightarrow \mathscr{F} \times \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \\ f & \longmapsto (f(\mathrm{A}), \overrightarrow{f}) \end{cases}$$

est une bijection affine (retrouver la dimension de l'espace affine $\mathscr{A}(\mathscr{E},\mathscr{F})$ lorsque $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont de dimension finie).

Le cas où $\mathscr{E} = \mathscr{F}$ (un pas de plus vers la compréhension du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$). Soient $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine et $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$. Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f = \tau \circ \varphi$ où A est point fixe de φ et τ une translation. Montrer que si $f = \tau' \circ \varphi'$ où A est point fixe de φ' et τ' une translation alors $\tau = \tau'$ et $\varphi = \varphi'$. Autrement dit, on a unicité dans la décomposition précédente. [RDO2, 5.3.3.3°]

De même, en supposant de plus que A est dans l'image de f, montrer que f peut s'écrire sous la forme $f = \varphi \circ \tau$ où A est point fixe de φ et τ une translation (ce ne sont pas les mêmes τ et ϕ que pour la décomposition ci-dessus). Montrer que si $f = \varphi' \circ \tau'$ où A est point fixe de φ' et τ' une translation alors $\tau = \tau'$ et $\varphi = \varphi'$. Autrement dit, on a unicité dans la décomposition précédente.

Attention, dans les résultats précédents, il est important de souligner qu'on a démontré l'unicité d'une décomposition d'une application affine sous la forme application affine où le point A (choisi à l'avance) est fixe et translation et pas l'unicité d'une décomposition sous la forme application affine à point fixe et translation. ■

Dans la remarque qui suit, on souligne le fait que, comme dans toute structure algébrique, les bijections affines se comportent bien : ce sont des isomorphismes pour la structure affine ; autrement dit l'inverse d'une bijection affine est encore affine.

Remarque 26 – Bijection affine. [FRE, II.3 Proposition 4] Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux k-espaces affines de direction respectives E et F et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une bijection affine. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une bijection linéaire de E dans F. Déduire de l'exemple 25 que f^{-1} est aussi affine. Ainsi, l'inverse d'une bijection affine est encore affine.

Remarquer aussi qu'une application affine est injective (resp. surjective) si et seulement si sa flèche l'est. ■

3) Le groupe affine.

Le long exercice qui suit propose l'étude détaillée du groupe affine (centre, groupe des commutateurs, un système de générateurs). Cette étude utilise les définitions de l'exercice 24. Grâce à l'application flèche, on peut utiliser tout ce qu'on connaît déjà sur le groupe linéaire usuel (centre, groupe des commutateurs, systèmes de générateurs)... C'est d'ailleurs l'occasion de réviser tout ça. La difficulté repose donc sur « l'ajout » des translations. Cet exercice fournit ainsi un exemple de groupe pour enrichir un peu les leçons sur les groupes.

Exercice 19 – Groupe affine. Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E. Montrer que l'ensemble $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ des bijections affines de $\mathscr{E}$ dans lui-même forme un groupe. On considère la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \longrightarrow 1 \qquad \textbf{(GA)}$$

où le deuxième morphisme est donné par $t \mapsto \tau_t$ et le troisième morphisme par $f \mapsto \overrightarrow{f}$ (vérifier qu'il s'agit bien de morphismes (voir l'exemple 23, l'exercice 17 et la remarque 26)).

a) Montrer que la suite est exacte (voir l'exemple 23 pour l'exactitude en E et $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$, voir l'exemple 25 pour l'exactitude en $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$). [FRE, IV.1]

b) On va montrer que cette suite exacte est scindée et donner explicitement des scindages (un scindage pour chaque point de $\mathscr{E}$). Fixons $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{GA}(\mathscr{E})_{\mathrm{A}}$ des bijections affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui admettent A pour point fixe est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ (est-il distingué ? quels sont ses conjugués ?) et que l'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un isomorphisme de groupe entre $\mathrm{GA}(\mathscr{E})_{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$. L'isomorphisme inverse réalise alors le scindage attendu de la suite exacte. Ainsi, on a décrit la structure de groupe de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ comme produit semi-direct de deux groupes connus $\mathrm{E} = k^n$ et $\mathrm{GL}(\mathrm{E}) = \mathrm{GL}_n(k)$. [RDO2, 5.3.3.3°]

Pour la suite de l'exercice, on suppose que $\mathscr{E}$ est de dimension finie.

c) *Étude du centre de* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *(à partir de celui de* $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$*) lorsque* $k \neq \mathbb{F}_2$. Soit $f \in \mathrm{ZGA}(\mathscr{E})$. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une homothétie vectorielle. En déduire que f est une homothétie ou une translation. En utilisant le principe de conjugaison cher à Perrin (de façon plus précise, si g est une bijection affine de $\mathscr{E}$, que vaut $gh_{\mathrm{A},\lambda}g^{-1}$ et que vaut $g\tau_t g^{-1}$), montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ (si f est une homothétie, on pourra conjuguer f par toute les translations, si f est une translation, on pourra conjuguer f par toutes les homothéties). Ainsi $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ a un centre trivial ; en déduire que $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ n'est pas isomorphe au produit direct de E par $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$).

d) *Étude des commutateurs de* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *(à partir de celui de* $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$*) lorsque* $k \neq \mathbb{F}_2$. On suppose que $k \neq \mathbb{F}_2$ et $\mathscr{E}$ de dimension finie. En considérant le commutateur d'une homothétie et d'une translation, montrer que toute translation est un commutateur. En déduire que le groupe des commutateurs de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est

$$\mathrm{SA}(\mathscr{E}) = \left\{ f \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}), \quad \overrightarrow{f} \in \mathrm{SL}(\mathrm{E}) \right\}.$$

e) *Étude d'une famille de générateurs de* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *lorsque* $k \neq \mathbb{F}_2$. On suppose que $k \neq \mathbb{F}_2$. Montrer que l'ensemble des dilatations (voir la définition à l'exercice 24) engendre $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ (pour obtenir les translations, on pourra considérer deux dilatations de même direction ayant des hyperplans parallèles, on pourra aussi se souvenir que $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ est engendré par les dilatations vectorielles).

f) *Étude d'une famille de générateurs de* $\mathrm{SA}(\mathscr{E})$ *pour un espace de dimension supérieure ou égale à* 2. On suppose que $\mathscr{E}$ de dimension finie supérieure ou égale à 2 (si $\dim \mathscr{E} = 1$ alors $\mathrm{SA}(\mathscr{E})$ est l'ensemble des translations et il n'y a pas de transvection). Montrer que l'ensemble des transvections (voir la définition à l'exercice 24) engendre $\mathrm{SA}(\mathscr{E})$ (pour obtenir les translations, on pourra considérer deux transvections de même direction ayant des hyperplans parallèles, on pourra aussi se souvenir que $\mathrm{SL}(\mathrm{E})$ est engendré par les transvections vectorielles).

g) *Étude d'une famille de générateurs de* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *lorsque* $k = \mathbb{F}_2$. On suppose que $k = \mathbb{F}_2$ et $\mathscr{E}$ de dimension finie supérieure ou égale à 2 (Que se passe-t-il lorsque $\mathscr{E}$ est de dimension 1 (voir la question **j**)). Montrer que l'ensemble des transvections engendre $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$. En particulier, montrer que $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est engendré par des éléments d'ordre 2.

h) *Étude des commutateurs de* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *(à partir de celui de* $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$*) lorsque* $k = \mathbb{F}_2$. On suppose que $k = \mathbb{F}_2$ et $\mathscr{E}$ de dimension finie supérieure ou égale à 3 (voir les questions **j** et **l** pour la dimension 1 et 2). Montrer que $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est son propre groupe des commutateurs.

i) *Étude du centre de* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *lorsque* $k = \mathbb{F}_2$. Que peut-on dire (de la flèche) d'une bijection affine qui commute avec toutes les transvections ? En déduire que lorsque $k = \mathbb{F}_2$, le centre ne contient que des translations. Lorsque $\dim \mathscr{E} \geqslant 2$ (c'est-à-dire qu'il existe vraiment des transvections), montrer que $\mathrm{ZGA}(\mathscr{E}) = \{1\}$ (voir la question **j** pour la dimension 1).

j) *Étude de* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *lorsque* $\mathscr{E}$ *est une droite affine sur* $\mathbb{F}_2$. À quel groupe classique, $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est-il isomorphe ? Dans cet isomorphisme, que deviennent les translations, les homothéties, les dilatations et les transvections ? Déterminer le groupes des commutateurs de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$.

k) *Étude de* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *lorsque* $\mathscr{E}$ *est une droite affine sur* $\mathbb{F}_3$. À quel groupe classique, $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est-il isomorphe ? Dans cet isomorphisme, que deviennent les translations, les homothéties, les dilatations et les transvections ? Déterminer le groupes des commutateurs de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$.

l) *Étude de* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *lorsque* $\mathscr{E}$ *est un plan affine sur* $\mathbb{F}_2$. À quel groupe classique, $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est-il isomorphe ? Dans cet isomorphisme, que deviennent les translations, les homothéties, les dilatations et les transvections ? Déterminer le groupes des commutateurs de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$.

m) *Quelques classes de conjugaisons.* Étudier les classes de conjugaison dans le groupe affine des homothéties, translations, transvections, dilatations, symétries (voir la définition à l'exercice 24).

n) *Un peu de groupes.* Montrer que tous les sous-groupes de $\mathfrak{S}_5$ d'ordre 20 sont conjuguées (on pourra utiliser les théorèmes de 5-Sylow). Montrer qu'ils sont isomorphes au groupe affine d'une droite affine sur $\mathbb{F}_5$. Plus généralement, montrer que tous les sous-groupes d'ordre $p(p-1)$ de $\mathfrak{S}_p$ où p est un nombre premier sont conjugués et montrer qu'ils sont isomorphes au groupe affine d'une droite affine sur $\mathbb{F}_p$.

o) *Topologie.* Soit $\mathscr{E}$ un $\mathbb{R}$-espace (resp. un $\mathbb{C}$-espace) affine de dimension finie. Combien $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ a-t-il de composantes connexes ?

p) *Un isomorphisme classique.* On note HT le sous-groupe des homothéties-translations de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$. Montrer que $\mathrm{GA}(\mathscr{E})/\mathrm{HT}$ et $\mathrm{PGL}(\mathrm{E})$ sont isomorphes (c'est une illustration de $\mathrm{G/HK} = (\mathrm{G/H})/(\mathrm{HK/H})$). [FRE, IV.1 exercice 1]

q) Dresser un bilan propre de l'étude de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$: centre, groupe des commutateurs, générateurs.

V Sous-espace affine.

Comme toujours dans l'étude d'une structure, on définit les sous-trucs. Cette partie est divisée en cinq sous-parties. La première sous-partie définit la notion de sous-espace affine ainsi que la notion bien connue de parallélisme. La deuxième sous-partie étudie l'intersection de sous-espaces affines (et donc celle d'espace affine engendré). La troisième partie étudie les points fixes d'une applications affines. Le dénominateur commun entre ces deux parties est le fait que dans chacun des cas, l'ensemble considéré peut être vide. Dans la quatrième sous-

partie, on définit certains types d'applications affines en lien avec les sous-espaces affines. Enfin, la cinquième sous-partie est consacrée au théorème de Thalès.

1) Définition - Parallélisme.

Ici, on donne donc une définition-caractérisation des sous-espaces affines qu'il est intéressant de comparer avec les caractérisations des applications affines : on retrouve, entre autre, la définition par le lien avec le vectoriel (on a une direction qui est un sous-espace vectoriel) et le lien avec les barycentres. On retrouve aussi les problèmes liés à la caractéristique 2. On remarquera enfin le retour de la relation d'équivalence $\mathscr{R}_{\mathrm{F}}$ (voir l'exercice 8) et une nouvelle apparition du principe « si c'est vrai en un point, c'est vrai partout ».

Exercice 20 — Définition des sous-espaces affines. [RDO2, 5.2.1 Théorème I et Théorème II], [FRE, I.2.1] Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E et $\mathscr{F}$ une partie de $\mathscr{E}$. On note $i : \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ l'application d'inclusion. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) Il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ et F sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ tel que $\mathscr{F} = \mathrm{A} + \mathrm{F}$;

(ii) Il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{F}$ tel que ${\varphi_{\mathrm{A}}}^{-1}(\mathscr{F}) = \left\{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \mathrm{B} \in \mathscr{F}\right\}$ soit un sous-espace vectoriel de E ;

(iii) $\mathscr{F} \neq \varnothing$ et pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{F}$, l'ensemble $\mathrm{F}_{\mathrm{A}} = {\varphi_{\mathrm{A}}}^{-1}(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de E ;

(iv) Il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ tel que $\mathscr{F}$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}_{\mathrm{A}}$;

(v) $\mathscr{F} \neq \varnothing$ et pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{F}$, l'ensemble $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}_{\mathrm{A}}$;

(vi) Il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $\mathscr{F}$ soit une classe d'équivalence pour la $\mathscr{R}_{\mathrm{F}}$ (voir l'exercice 8) ;

(vii) $\mathscr{F} \neq \varnothing$ et il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que l'action de E sur $\mathscr{E}$ induise une action de F sur $\mathscr{F}$ et que cette action soit transitive.

($viii$) Il existe une structure d'espace affine sur $\mathscr{F}$ telle que i soit une application affine ;

(ix) $\mathscr{F} \neq \varnothing$ et tout barycentre d'une famille de points de $\mathscr{F}$ est dans $\mathscr{F}$;

(x) $\mathscr{F} \neq \varnothing$ et tout barycentre d'une famille de trois points de $\mathscr{F}$ est dans $\mathscr{F}$;

De plus, si car$k \neq 2$, les propositions précédentes sont équivalentes à

(xii) $\mathscr{F} \neq \varnothing$ et tout barycentre d'une famille de deux points de $\mathscr{F}$ est dans $\mathscr{F}$.

Si $\mathscr{F}$ vérifie ces propositions, on dit que $\mathscr{F}$ est un *sous-espace affine de* $\mathscr{E}$. Le sous-espace vectoriel F (ou F_{A}) de E des points (i), (ii), (iii), (vi) et (vii) ne dépend pas de A et est appelé la direction de $\mathscr{F}$. Il est donné par $\mathrm{F} = \left\{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{F}\right\}$.

On remarquera que, sauf dans le cas d'un sous-espace affine de l'espace affine vide, un sous-espace affine n'est jamais vide.

On peut maintenant définir la notion connue depuis bien longtemps de parallélisme.

Définition 27 — Parallélisme. [RDO2, 5.2.1.4°] [FRE, I.2.2 Définition 7] Soient $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathscr{E}$ de direction respective F et G. On dit que $\mathscr{F}$ est (faiblement) parallèle à $\mathscr{G}$ si $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$. On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont parallèles si $\mathrm{F} = \mathrm{G}$.

Il y a donc deux notions de parallélismes (attention à la formulation). La première relation est évidemment transitive, réflexive mais en général pas symétrique alors que la deuxième est une relation d'équivalence. Cependant, en pratique et notamment en dimension finie, on ne distingue pas vraiment les deux car on sait si les espaces ont même dimension ou pas.

L'exercice qui suit fait écho au retour de la relation d'équivalence $\mathscr{R}_{\mathrm{F}}$. L'espace affine quotient $\mathscr{E}/\mathscr{R}_{\mathrm{F}}$ n'est rien d'autre que l'ensemble des sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ de direction F.

Exercice 21 — Sous-espaces affines de direction donnée. Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E et F un sous-espace vectoriel de E. Munir l'ensemble des sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ de direction de F d'une structure d'espace affine (voir l'exercice 8 et le point (vi) de l'exercice 20).

Comme toujours dans une structure algébrique, on a un moyen de construire des sous-trucs : les images directes et réciproques par les morphismes. Ici, ça ne se passe pas si bien ! On peut avoir des images réciproques vides et c'est la source de nombreuses difficultés ou de nombreux phénomènes intéressants (chacun choisira son point de vue).

Exemple 28 — Machine à construire des sous-espaces affines. [RDO2, 5.3.1.4°] [FRE, II.3 Théorème 1] Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux k-espaces affines et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine.

a) Montrer que l'image par f d'un sous-espace affine $\mathscr{G}$ de $\mathscr{E}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{F}$ dont on donnera la direction en fonction de celle de $\mathscr{G}$.

b) L'image réciproque d'un sous-espace affine de $\mathscr{F}$ est-elle un sous-espace affine de $\mathscr{E}$? (Encore une fois : ne pas marcher trop vite au risque de tomber dans le vide !) Lorsque c'en est un, quelle est la direction ?

c) Exemple. Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Que peut-on dire de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mathrm{A}x = b$.

d) Exemple. On considère une équation différentielle linéaire avec second membre. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions ?

Dans la leçon de dénombrement, plutôt que de compter, comme tout le monde, les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie ; pensez donc à regarder ce qui se passe en affine (ou même, on verra ça plus tard en projectif).

Exemple 29 – Un peu de dénombrement.

a) Déterminer le nombre de droites affines d'un plan affine sur un corps fini.

b) Plus généralement, déterminer le nombre de sous-espace affine de dimension k d'un espace affine de dimension n sur un corps fini.

2) Intersection de sous-espaces affines.

L'exercice qui suit étudie l'intersection d'espaces affines. On retrouve une nouvelle fois les problèmes liés au vide. On peut cependant, comme pour toutes les structures algébriques, définir une notion d'espace affine engendré par une partie **non vide**. On passe aussi un peu de temps à examiner en détail l'exemple pas si trivial de l'intersection de deux sous-espaces affines. On s'attardera en particulier sur la question **e** pour bien se mettre en tête la condition d'intersection non vide (qui s'exprime au niveau vectoriel en terme de somme et non d'intersection). Par ailleurs, on notera que la question **i** est très utile en pratique : elle permet notamment de définir les projections.

Exercice 22 – Intersection d'espaces affines. [RDO2, 5.2.2] [FRE, I.2.1 corollaire et I.2.3 Théorème 2] Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine.

a) Soit $(\mathscr{F}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathscr{E}$. Montrer que

$$\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathscr{F}_i$$

est vide ou un sous-espace affine dont on donnera la direction.

b) Soit X une partie **non vide** de $\mathscr{E}$. Montrer qu'il existe un plus petit sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant X, que ce sous-espace affine est l'intersection des sous-espaces affines contenant X. Il est noté $\langle \mathrm{X} \rangle_{\mathrm{aff}}$ et est appelé le sous-espace affine engendré par X.

c) Montrer que $\langle \mathrm{X} \rangle_{\mathrm{aff}}$ est l'ensemble des barycentres des points de X.

d) Exemples : où on retrouve ce qu'on sait depuis très longtemps. En déduire que par deux points distincts d'un espace affine, il passe une droite et une seule. Montrer que par un point d'un espace affine, il passe une unique parallèle à une droite donnée. Montrer qu'une droite qui a deux points dans un plan est contenue dans le plan.

Dans la question **e**, on s'intéresse à l'intersection de deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ de direction respective F et G. Il est important de remarquer que la condition d'une intersection non triviale de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ s'exprimer à l'aide de la somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ ce qui peut paraître étonnant au premier abord. Il est donc important de bien réfléchir à cette question et surtout **faire un dessin**.

e) Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) Il existe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{F} \times \mathscr{G}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$;
(ii) Pour tout $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{F} \times \mathscr{G}$, on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$;
(iii) $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$.

f) On suppose $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ de dimension finie. Quel est la dimension de $\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{G} \rangle_{\mathrm{aff}}$? Là encore un **dessin** s'impose ; de même que la remarque : « si on a un point dans l'intersection, tout se passe comme en vectoriel ».

g) Retrouver le fait que deux droites (resp. deux hyperplans) non parallèles d'un plan (resp. espace) affine se coupent en un seul point (resp. suivant un sous-espace de codimension 2).

h) Déduire de la question **e** que si $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$.

i) Déduire de la question **e** que si $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un singleton. En particulier, l'intersection d'un hyperplan affine et d'une droite affine qui ne lui est pas faiblement parallèle est réduite à un point.

3) Point fixe d'une application affine.

Comme on l'a déjà souligné (voir l'exercice 25), l'existence de points fixes pour une application affine est très utile : on se ramène à du vectoriel et donc c'est facile. C'est cette étude que propose l'exercice suivant. Le point fondamental est la question **b** qui assure l'**existence et l'unicité d'un point fixe** lorsque 1 n'est pas valeur propre de la flèche. La fin de l'exercice est consacrée à l'obtention de points fixes (pour une ou plusieurs applications affines) par un autre moyen : moyenner.

Exercice 23 – Point fixe d'une application affine. [FRE, IV.2 Théorème 2] [RDO2, 5.3.2.1°] Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine.

a) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est vide ou un sous-espace affine dont on donnera la direction. Lorsque l'ensemble des points fixes de f est non vide, en choisissant comme origine l'un des points fixes, f se ramène à une application linéaire et devient donc bien plus simple à étudier.

b) *La remarque fondamentale (en particulier pour l'étude des isométries).* Si $\overrightarrow{f} - \mathrm{id_E}$ est une bijection de E (en dimension finie, c'est assuré par le fait que $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id_E}) = \{0\}$ ou encore que 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$) alors f admet **un unique point fixe**. En particulier, l'ensemble des points fixes est non vide.

c) Retrouver le fait qu'une homothétie ait un centre.

d) *Une deuxième façon d'obtenir des points fixes : moyenner.* On se place en caractéristique nulle. Montrer qu'un élément de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ d'ordre fini a un point fixe. Est-ce vrai en caractéristique p ?

e) Plus généralement, en caractéristique nulle, montrer que tous les éléments d'un sous-groupe fini de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ ont un point fixe commun et s'identifient dont à un sous-groupe de GL(E). Est-ce vrai en caractéristique p ?

f) *Un résultat difficile = un développement ? (voir par exemple [BER, 2.7.5.10]).* On suppose que $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien et G un sous-groupe compact de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$. Tous les éléments de G ont un point fixe commun. Ainsi G s'identifie à un sous-groupe compact de GL(E) et donc un sous-groupe fermé de O(E)...

4) Des exemples d'applications affines construites à partir de sous-espaces affines.

Dans l'exercice qui suit, on donne quelques autres grandes familles d'applications affines. On a reporté leur définition et leur construction ici puisqu'elle utilise la notion de sous-espace affine et d'intersection de sous-espaces affines. On définit ainsi les projections, les affinités (et dilatations) et les transvections. Les projections sont à la base du théorème de Thalès ; quant aux dilatations et transvections, elles sont à la base de l'étude du groupe affine.

Exercice 24 – Quelques nouvelles sortes d'applications affines. Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E, $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F et G un sous-espace de E vérifiant $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. On remarquera qu'on s'est donné un sous-espace de $\mathscr{E}$ (c'est $\mathscr{F}$) et un sous-espace de E (c'est G) : on n'a pas d'espace $\mathscr{G}$ « au-dessus » de G. En fait, la construction des applications affines va justement reposer sur le fait qu'on fait varier les espaces $\mathscr{G}$ au-dessus de G.

a) *Projection sur $\mathscr{F}$ de direction* G. [FRE, II.2 exemple 4] [RDO2, 5.3.2.2°] Pour $x \in \mathscr{E}$, on considère $\mathscr{G}_x$ l'espace affine de direction G passant par x. Montrer que $\mathscr{G}_x \cap \mathscr{F}$ est un singleton qu'on note $p(x)$ (faire un **dessin**). Montrer que l'application $p : x \mapsto p(x)$ est affine. Déterminer $\overrightarrow{p}$, montrer que l'ensemble des points fixes de p est $\mathscr{F}$ et calculer $p \circ p$.

b) *Affinité d'espace directeur $\mathscr{F}$ et de direction* G *et de rapport $\alpha \in k$.* [RDO2, 5.3.4.4°] Pour $x \in \mathscr{E}$, on note $p(x)$ le projeté de x sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G. On note $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha}(x)$ l'élément de $\mathscr{E}$ donné par

$$f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha}(x) = p(x) + \alpha\overrightarrow{p(x)x}$$

(faire un **dessin**). Montrer que $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha} : x \mapsto f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha}(x)$ est affine. Déterminer $\overrightarrow{f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha}}$, déterminer l'ensemble des points fixes de $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha}$. Calculer $p \circ f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha}$. En déduire l'expression de $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha} \circ f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\beta}$.

Montrer que $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},0} = p$ est la projection sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G. Montrer que $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},1} = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Montrer qu'une affinité de rapport non nul est bijective. Quel est son inverse ? On suppose que la caractéristique de k est différente de 2, montrer que ${f_{\mathscr{F},\mathrm{G},-1}}^2 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. On dit que ${f_{\mathscr{F},\mathrm{G},-1}}^2 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ est la symétrie par rapport à $\mathscr{F}$ de direction G.

Une affinité dont l'espace directeur est un hyperplan est appelé *dilatation*.

c) *Transvection d'hyperplan $\mathscr{H}$ et de direction* D. On désigne par $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de $\mathscr{E}$ de direction H, $\mathrm{D} \subset \mathrm{H}$ une droite de E et $g : \mathscr{E} \to k$ une équation de $\mathscr{H}$ et $x_0 \in \mathrm{D} \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $f : x \mapsto x + g(x)x_0$ est une bijection affine dont on calculera l'inverse. Calculer $\overrightarrow{f}$, déterminer l'ensemble des points fixes de f.

d) Réciproquement à la question **a**. Soit $p : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine telle que $p \circ p = p$. Montrer que p est un projection sur l'ensemble de ses points fixes parallèlement à $\operatorname{Ker} \overrightarrow{p}$.

e) Réciproquement à la question **b**. On suppose que la caractéristique de k est différente de 2. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine telle que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Montrer que f est la symétrie par rapport à l'ensemble à des points fixes de f parallèlement à $\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} + \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

f) On suppose que la caractéristique de k est différente de 2. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine telle que $\overrightarrow{f}^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, f est-elle une symétrie ? On pourra penser aux symétries glissées (voir aussi la forme réduite des isométries).

g) Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine laissant fixe point par point un hyperplan de $\mathscr{E}$. Que dire de f ?

5) Le théorème de Thalès : les projections sont affines

Maintenant qu'on a défini les projections, on peut s'en servir : par exemple pour démontrer le théorème de Thalès qui est en fait presque un synonyme du fait qu'une projection est affine. Pour d'autres utilisations des projections, on pourra aller voir dans [SOR, p.16 à 25], les démonstrations des théorèmes de Ménélaüs et Ceva.

Exercice 25 — Le théorème de Thalès ou à quoi ça sert de savoir que les projections sont affines. [BER, 2.5.1] Soit $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E.

a) Soient $\mathscr{H}_{\mathrm{A}}, \mathscr{H}_{\mathrm{B}}, \mathscr{H}_{\mathrm{C}}$ trois hyperplans parallèles distincts de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites de $\mathscr{E}$ qui ne sont pas faiblement parallèles au $\mathscr{H}_i$. Montrer que $\mathscr{H}_x \cap \mathscr{D}_i$ est réduit à un point pour $x \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ et $i \in \{1, 2\}$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $\mathscr{H}_{\mathrm{A}} \cap \mathrm{D}_i = \mathrm{A}_i$, $\mathscr{H}_{\mathrm{B}} \cap \mathrm{D}_i = \mathrm{B}_i$, $\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \cap \mathrm{D}_i = \mathrm{C}_i$.

Montrer que

$$\frac{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}{\overline{\mathrm{A_1C_1}}} = \frac{\overline{\mathrm{A_2B_2}}}{\overline{\mathrm{A_2C_2}}}$$

Indication : on pourra utiliser la projection sur $\mathscr{D}_2$ parallèlement à $\mathscr{H}_1$ et exprimer le rapport entre $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$ et $\overline{\mathrm{A_1C_1}}$ sous forme barycentrique.

b) Réciproquement, soit $\mathrm{D} \in \mathscr{D}_2 \setminus \{\mathrm{A}\}$ tel que

$$\frac{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}{\overline{\mathrm{A_1C_1}}} = \frac{\overline{\mathrm{A_2B_2}}}{\overline{\mathrm{A_2D}}}$$

alors $\mathrm{D} = \mathrm{C}_2$. (Attention, dans cette généralité, on ne peut pas énoncer la réciproque du théorème de Thalès comme une condition de parallélisme sur les hyperplans $\mathscr{H}_{\mathrm{A}}, \mathscr{H}_{\mathrm{B}}$ et $\mathscr{H}_{\mathrm{C}}$ puisqu'il existe plusieurs hyperplans passant par A_1 et A_2 et qui ne sont pas deux à deux parallèles : « il n'y a qu'à faire tourner autour de la droite $\mathrm{A_1A_2}$ » ; cette condition ne marche que lorsque $\dim \mathscr{E} = 2$).

c) Le théorème de Thalès du point de vue des actions de groupes. Le groupe affine d'une droite agit 2-transitivement sur la droite affine (voir les questions **a** et **g** de l'exercice 27). Montrer qu'il n'opère pas 3-transitivement. À quel condition deux triplets de points $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ et $(\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}')$ sont-ils dans la même orbite ? Montrer que les orbites sont paramétrées par $k \setminus \{0, 1\}$.

d) Encore une utilisation des projections. Soient F un sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ dont les directions respectives G_1 et G_2 sont des supplémentaires de F dans E. On considère une famille $(\mathscr{F}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de sous-espace affine de $\mathscr{E}$ ayant tous les mêmes directions F et $(\lambda_i)_{i \in \mathrm{I}} \in k^{(\mathrm{I})}$ une famille de scalaires dont la somme est non nulle. Pour $i \in \mathrm{I}$ et $j \in \{1, 2\}$, on note $\mathrm{A}_{i,j} = \mathscr{F}_i \cap \mathscr{G}_j$ (vérifier que les $\mathrm{A}_{i,j}$ existe bien).

Montrer que $\mathscr{F}$ le sous-espace affine de direction F passant par le barycentre de $(\mathrm{A}_{i,1}, \lambda_i)_{i \in \mathrm{I}}$ contient le barycentre de $(\mathrm{A}_{i,2}, \lambda_i)_{i \in \mathrm{I}}$ (on pourra utiliser la projection sur $\mathscr{G}_2$ parallèlement à F) et que $\mathscr{F}$ est le barycentre de la famille $(\mathscr{F}_i, \lambda_i)_{i \in \mathrm{I}}$ (voir l'exercice 21 pour définir le barycentre d'une famille de sous-espaces affines de direction fixée).

VI Repères.

Dans cette partie, on s'intéresse à la notion de repère, notamment celle de repère affine. La notion de repère est l'équivalent affine de la notion de base. On présente ici deux types de repères : le repère cartésien (une origine et une base de la direction) et le repère affine qui mène lui à la notion de coordonnées barycentriques. Au passage, on généralise au cas affine, les notions de familles libres et de familles génératrices.

Définition 30 — Repère. [RDO2, 5.4.2 et 5.4.3] [FRE, III.2.1] Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E.

Un *repère cartésien* $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \mathcal{B})$ est la donné d'un couple formé d'un point O de $\mathscr{E}$ et d'une base $\mathcal{B}$ de E. Lorsque $\mathscr{E}$ est de dimension finie, un tel repère permet d'identifier $\mathscr{E}$ à l'espace affine $k^{\dim \mathscr{E}}$. Montrer que $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ opère simplement et transitivement sur l'ensemble des repères cartésiens de $\mathscr{E}$.

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ est dite *affinement libre* si pour tout $i \in I$, $A_i \notin \langle A_j,\ j \neq i\rangle_{\text{aff}}$. Montrer que $(A_i)_{i\in I}$ est affinement libre si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in I\setminus\{i\}}$ soit une famille libre de E si et seulement si pour tout $i \in I$, la famille $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in I\setminus\{i\}}$ est libre.

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ est dite *affinement génératrice* si et seulement si $\langle A_i,\ i \in I\rangle_{\text{aff}} = \mathscr{E}$. Montrer qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ affinement génératrice si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in I\setminus\{i\}}$ soit une famille génératrice de E si et seulement si pour tout $A \in \mathscr{E}$, la famille $(\overrightarrow{AA_j})_{j\in I}$ est génératrice.

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ est un *repère affine* si et seulement si elle est affinement libre et génératrice.

Dans l'exercice suivant, on définit la notion de coordonnées barycentriques.

Exercice 26 – Repère affine et barycentre. Soient $(A_i)_{i\in I}$ un repère affine d'un espace affine $\mathscr{E}$. Montrer que, pour tout point A de $\mathscr{E}$, il existe une unique famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in k^{(I)}$ vérifiant $\sum_{i\in I}\lambda_i = 1$ tel que A est barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$. On dit que λ_i est la i^e *coordonnée barycentrique de* A (ne pas oublier la condition d'homogénéité sur la somme des λ_i). L'application $A \mapsto \lambda_i$ est évidemment une forme affine (par associativité du barycentre).

Maintenant qu'on a défini les repères affines, on étudie leurs propriétés élémentaires : on a un théorème du repère affine incomplet ou trop complet (question **c** et **d**). Comme pour les bases, les repères affines permettent de définir des applications affines en fixant les images des éléments du repère. Enfin, on termine cet exercice par le théorème de Desargues dont on donne la version « action de groupe ».

Exercice 27 – Un peu de travail autour des repères affines.

a) Qu'est ce qu'un repère affine sur une droite affine ?

b) Qu'est ce qu'un repère affine dans un plan affine ?

c) Montrer que toute famille affinement libre se complète en un repère affine.

d) Montrer que, de toute famille affinement génératrice, on peut extraire un repère affine.

Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux espaces affines, $(A_i)_{i\in I} \in \mathscr{E}^I$ et $(B_i)_{i\in I} \in \mathscr{F}^I$.

e) Montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ est affinement libre, il existe au moins une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que $f(A_i) = B_i$.

f) Montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ est affinement génératrice, il existe au plus une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que $f(A_i) = B_i$.

g) Montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ est un repère affine, il existe une unique application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que $f(A_i) = B_i$. Montrer que f est injective (resp. surjective, bijective) si $(B_i)_{i\in I}$ est affinement libre (resp. affinement génératrice, un repère affine). En déduire que $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ opère simplement et transitivement sur l'ensemble des repères affines de $\mathscr{E}$.

h) *Le théorème de Desargues.* [TIS, p.65] [BER, 2.5.4] On considère deux repères affines (A, B, C) et (A′, B′, C′) sans point commun d'un plan affine $\mathscr{E}$. Montrer que (A, B, C) et (A′, B′, C′) sont dans la même orbite sous l'action du groupe HT des homothéties-translation de E si et seulement si (AB)//(A′B′), (AC)//(A′C′) et (BC)//(B′C′).

VII Quelques exercices d'applications.

Les exercices qui suivent offrent l'occasion de vérifier qu'on a bien compris les éléments de géométrie présentés dans ce qui précède.

Exercice 28 – Point fixe et application affine. Soient $\mathscr{E}$ un plan affine, ABC un (vrai) triangle de $\mathscr{E}$ et $A', B' \in \mathscr{E}$.

a) Soit $C' \in \mathscr{E}$. Montrer qu'il existe une unique application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

b) Comment construire $C' \in (A'B')$ pour que f soit sans point fixe.

Exercice 29 – Classe de similitude affine. Soient $\mathscr{E}$ un plan affine (sur un corps de caractéristique différente de 2) et ABC un (vrai) triangle de $\mathscr{E}$. Soit $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) une droite de $\mathscr{E}$. On note $a = \mathscr{D} \cap (BC)$ (resp. $a' = \mathscr{D}' \cap (BC)$), $b = \mathscr{D} \cap (AC)$ (resp. $b' = \mathscr{D}' \cap (AC)$) et $c = \mathscr{D} \cap (AB)$ (resp. $c' = \mathscr{D}' \cap (AB)$). En particulier, on suppose que ces points existent.

a) Montrer qu'il existe une unique application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ (resp. $f' : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$) telle que $f(A) = a$, $f(B) = b$ et $f(C) = c$ (resp. $f'(A) = a'$, $f'(B) = b'$ et $f'(C) = c'$).

b) Déterminer $\chi_{\overrightarrow{f}}$. En déduire que f a un point fixe. Le construire et « réduire f » (on pourra introduire l'application $g : M \mapsto$ Milieu de $Mf(M)$ et montrer qu'elle est affine).

c) Déduire de la question précédente qu'il existe $h \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ telle que $hfh^{-1} = f'$.

Exercice 30 – Composée d'affinité. Soient $\mathscr{E}$ un plan affine et ABC un vrai triangle de $\mathscr{E}$. On fixe $a \in (\mathrm{BC})$ avec a distinct des points B et C, $b \in (\mathrm{AC})$ distinct des points C et A et $c \in (\mathrm{AB})$ distinct des points A et B.

a) Montrer qu'il existe une unique affinité σ_a (resp. σ_b, σ_c) d'axe directeur (Aa) (resp. (Bb), (Cc)) envoyant B sur C (resp C sur A, A sur B). On pose $f = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ et $g = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$.

b) Calculer f^2 (on pourra chercher un point fixe pour f et calculer $\chi_{\overrightarrow{f}}$, on pourra chercher l'image des droites (BA) et (BC) par f).

c) On se place sur $\mathbb{R}$. Quand f est-il d'ordre fini ? Étude de la configuration et des « éléments » de f.

d) Mêmes questions pour g.

Références

[AUD] M. Audin. *Géométrie de la licence à l'agrégation*. Belin, 1998.

[BER] M. Berger. *Géométrie*. Cedic Nathan, 1977.

[FRE] J. Frenkel. *Géométrie pour l'élève-professeur*. Hermann, 1973.

[RDO2] E. Ramis, C. Deschamps, et J. Odoux. *Cours de Mathématiques 2, Algèbre et applications à la géométrie*. Dunod, 1998.

[SOR] R. Sortais et Y. Sortais. *La géométrie du triangle : exercices résolus*. Hermann, 2002.

[TIS] C. Tisseron. *Géométrie affine, projective et euclidienne*. Hermann, 2000.